http://www.guedelon.com/fr/ecole/geometrie.php#corde

Petit cours de géométrie
Je voudrais maintenant te parler un petit peu de mathématiques. Tu vas voir cela peut être très amusant de faire des maths avec les méthodes du Moyen-Age.

Les mesures sont très importantes sur un chantier de construction.
A Guédelon, par exemple, les « oeuvriers » doivent savoir mesurer et tracer des figures géométriques pour bien construire le futur château.

Le tailleur de pierre, par exemple, devait pouvoir tailler une pierre aux dimensions exactes demandées par le maçon. De même, le charpentier doit respecter les notions de proportionnalité pour réaliser sa charpente.

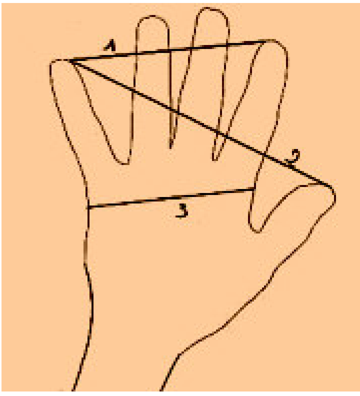
Mais sais-tu qu'au Moyen-Age on ne mesurait pas avec les unités de ton époque (cm, m.). Au Moyen-Age, on utilise des mesures humaines, héritées des romains .

Les unités de mesure au Moyen-Age
Les outils de mesure
Fabrication de ta corde à 13 noeuds
Quelques exercices amusants

Les unités de mesure au Moyen-Age :

Toutes les mesures utilisées au Moyen-Age correspondent à la longueur d'une partie du corps humain.

L'unité de référence minimale est la ligne, cette unité équivaudrait en fait au diamètre d'un grain d'orge, soit environ 2,2 mm de tes mesures à toi.



1 : palme
2 : empan
3 : paume

Je te propose un petit tableau contenant les unités de mesures médiévales, ainsi que leurs équivalences :

Ligne	-	-	0,225 cm
Pouce	12 lignes	-	2,707 cm
Paume	34 lignes	-	7,60 cm
Palme	55 lignes	-	12,40 cm
Empan	89 lignes	Paume + empan	20,08 cm
Pied	144 lignes	Empan + palme	32,48 cm
Coudée	233 lignes	Pied + empan	52,56 cm
Toise	886 lignes	-	194,9 cm

Or tu dois bien te douter que selon les architectes, les régions et au cours du temps, ces mesures pouvaient varier sensiblement.

Ainsi, le grain d'orge, unité de mesure minimale, peut être plus gros dans des régions dont la terre est très riche que dans des régions où la terre est pauvre.

A la suite de recherches archéologiques, on a pu retrouver que le pied vaut par exemple 28,5 cm à Strasbourg ; 29,14 cm en Lorraine ; 32,48 à Brie-Comte-Robert, et 34,3 cm à Marmoutiers.

Seulement, pour simplifier les calculs, les unités de mesures correspondent toujours à des nombres entiers.

Ainsi, une toise = 6 pieds ; il n'y avait jamais par exemple 1 pied = 11,8 pouces .

Les outils de mesure :

Au Moyen-Age, le maître d'oeuvre utilise comme toi le compas et l'équerre pour faire ses tracés. On utilise plus facilement la géométrie pour résoudre des calculs que l'algèbre, mal maîtrisé par les gens de l'époque.

Tiens, je te propose de t'exercer à résoudre un petit exercice de calcul grâce à ton compas. Comment, à ton avis, pourrais-tu tracer le milieu d'un segment sans l'aide d'une règle graduée et uniquement avec ton compas ?
- Trace un segment [AB] (peu importe la longueur)
- Prends ton compas et ouvre-le de la longueur de ton segment (mets la pointe sur A et ouvre jusqu'à parvenir à B)
- Place la pointe de ton compas sur A, et trace 2 arcs de cercle ; un en haut de la droite, et l'autre en dessous de la droite.
- Tu places maintenant la pointe de ton compas sur B, et tu traces de la même façon 2 arcs de cercle, de façon à ce qu'ils viennent « couper » les deux arcs de cercle précédents.
- Tu prends ensuite ta règle et tu la places aux deux points d'intersection des arcs de cercle. Il ne te reste plus qu'à tracer la droite qui passe par les deux points d'intersection. Celle-ci coupe ton segment [AB] au point o. o est donc le milieu de ton segment [AB].

On utilise aussi la corde à 13 noeuds. Pourquoi l'appelle-t-on «corde à 13 noeuds» ?

La corde à 13 noeuds est une corde comportant 12 intervalles égaux, ce qui fait donc 13 noeuds lorsqu'elle est ouverte.
Un intervalle correspond à une coudée.
Donc 12 intervalles = 630, 72 cm.

A quoi sert la corde à 13 noeuds ?
La corde à 13 noeuds sert notamment à reporter au sol les tracés exactes des figures géométriques. Cet outil permet notamment de tracer des angles droits, des triangles isocèles, des droites perpendiculaires. et tout cela sans utiliser d'unités de mesure algébriques.

Maintenant, je te propose de réviser tes maths tout en t'amusant. Tout d'abord, tu peux toi aussi te construire ta propre corde à 13 noeuds. Pour que cela soit plus facile à utiliser pour toi, nous la ferons un peu plus petite.

Fabrication de ta corde à 13 noeuds :

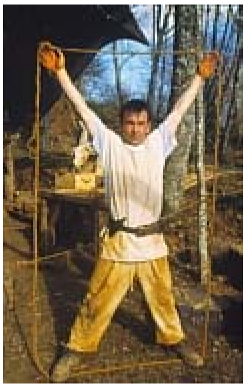
- Tu dois tout d'abord prendre une corde ou un fil épais.
- A l'extrémité de cette corde, tu fais un noeud.
- Puis, tu vas mesurer un intervalle en fonction de la longueur de ta propre coudée. A la fin de cet intervalle, tu fais un noeud.
- Tu répètes l'opération onze fois. Tu dois normalement obtenir 12 intervalles, et 13 noeuds.
- C'est bon ? Et bien, ça y est, tu as fabriqué ta propre corde à 13 noeuds.

Maintenant, je te propose de réaliser de petits exercices de mathématiques en t'amusant.

Tu peux commencer par quelque chose d'assez simple : tracer un triangle rectangle, sans équerre, avec seulement ta corde à 13 noeuds. Ce tracé permet notamment d'obtenir un angle droit.

Il te faudra l'aide de deux camarades (mais tu peux éventuellement les remplacer par des petits piquets en bois).
- Commence par fermer ta corde. Celle-ci ne doit plus avoir que 12 noeuds et 12 intervalles. Vérifie, c'est correct ?
- Tu places ta main sur un des noeuds de la corde (peu importe lequel).
- Tu laisses 3 intervalles, et ton camarade prend la corde au niveau du quatrième noeud. Tu laisses maintenant 4 intervalles, et ton autre camarade prend la corde sur le huitième noeud.
- Il ne vous reste plus qu'à tendre cette corde pour obtenir votre triangle rectangle !

Votre triangle doit donc avoir 3 intervalles sur un côté, 4 de l'autre, et 5 sur le dernier côté.

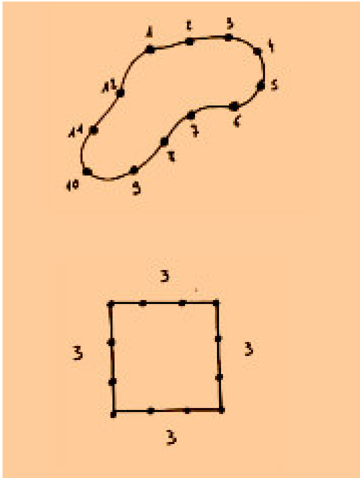


Quelques exercices amusants :

Je vois bien que tu deviens un expert du tracé géométrique. Si tu veux continuer à faire des maths en t'amusant, tu peux maintenant tracer d'autres figures, toujours avec ta corde à 13 noeuds.

1- Tracer un carré :
Un carré a combien de côtés ? 4 côté égaux, n'est-ce pas ?

Ta corde possède 12 intervalles ; ton carré doit donc avoir 4 côtés de 3 intervalles chacun : 4 x 3 = 12 .



2- Tracer un triangle isocèle :
Un triangle isocèle c'est quoi déjà ? C'est un triangle qui a 2 côtés égaux.

Tu traces la base de ton triangle ; celui-ci comporte par exemple 2 intervalles. Il t'en reste donc 10 pour tracer tes deux côtés égaux ; chaque côté équivaudra donc à 5 intervalles. 2 + 5 + 5 = 12

3- Tracer un triangle équilatéral :
Et qu'est-ce qu'un triangle équilatéral ? C'est un triangle dont les trois côtés sont égaux.

Tu as 12 intervalles sur ta corde, et tu dois avoir 3 côtés identiques ; donc 12 : 3 = 4. Tu dois donc laisser 4 intervalles sur chaque côté : 4 + 4 + 4 = 12
Que peux-tu remarquer au sujet de ces trois figures ?

Et bien, elles ont toutes le même périmètre.

"La corde à 12 noeuds"
dîte aussi
"la corde à 13 noeuds"

Pourquoi l’appelle-t-on «corde à 12 nœuds» ?

La corde à 12 nœuds est une corde comportant 12 intervalles égaux, ce qui fait donc bien 12 noeuds si l'on n'a pas fait de nœud au début de la corde.
Mais il y a13 nœuds si l'on en fait un à chaque extrémité (toujours pour 12 intervalles).
Un intervalle correspond à une coudée.
Donc 12 intervalles = 630, 72 cm.(dans le cas ici choisi, mais variable selon les régions)
A quoi sert la corde à 12 nœuds ?
.
La corde à 12 nœuds sert notamment à reporter au sol les tracés exactes des figures géométriques. Cet outil permet notamment de tracer des angles droits, des triangles isocèles, des droites perpendiculaires… et tout cela sans utiliser d’unités de mesure algébriques.

La corde égyptienne

A quoi peut donc bien servir une corde à treize noeuds ?

Sur les rives du Nil, deux mille ans avant J.-C., la légende raconte que les Egyptiens se servaient d'une corde à treize noeuds de longueur 12 pour tracer des angles droits.

Ainsi muni de cette bonne équerre, ils pouvaient reconstituer chaque année les limites des champs rectangulaires que les crues du Nil avaient fait disparaître en apportant le limon fertile...

Une équerre ? Mais il s'agit d'une corde !

Il suffit pourtant d'attacher les deux extrémités puis de tendre avec deux mains et un piquet ou... avec trois piquets. On forme alors un triangle.

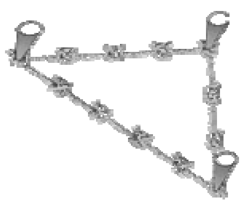
Dans la figure ci-dessous, essayer de voir où déplacer l'anneau ***S*** pour obtenir un triangle rectangle.

Déplacer l'anneau vert S[(1)], sous I.Explorer

Quand les côtés mesurent respectivement 3, 4 et 5 le triangle est rectangle.

Les Egyptiens utilisaient donc déjà un cas très particulier du théorème de Pythagore :

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$



Aujourd'hui certains maçons se servent de cet instrument pour vérifier leurs angles droits.

D'autres utilisent un *"six huit dix"*. **A** vous de savoir pourquoi...

http://histoiredechiffres.neuf.fr/mathematiciens/pythagore.htm

Qui était Pythagore ?

Pythagore était un **mathématicien grec de la fin du 6e siècle avant JC** , il serait né au large des côtes de Turquie .

Il fonda l'école des pythagoriciens qui était en fait une secte qui comptait environ 218 adeptes . Elle dura environ 1500 ans . Ils avaient des activités religieuses , philosophiques , mathématiques et politiques . La devise des pythagoriciens était «Toutes choses sont des nombres ». Ceux qui étaient dans cette école rapportaient leurs découvertes scientifiques à Pythagore. Il est donc impossible de distinguer les inventions de Pythagore de celles de ses disciples.

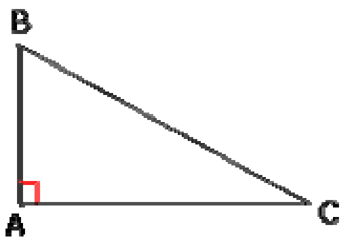
Il fut l'élève de Thalès . Comme pour ce dernier , on ne dispose d'aucune œuvre car à cette époque l'enseignement était oral. On ne sait donc pas si Pythagore a démontré son propre théorème.

La mort de Pythagore semble étrange . Voici la version la plus répandue : un jour , sa maison fut incendiée par ses ennemis .Plusieurs de ses disciples furent tués . Pythagore lui-même se sauva pour se retrouver dans un champ de haricots . Il s'arrêta et déclara qu'il préférait être tué plutôt que de traverser ce champ de haricots . Ses poursuivants le prirent au mot et lui tranchèrent la gorge .

Théorème de Pythagore

Le théorème de Pythagore était **connu des Babyloniens** (soit 100 ans avant Pythagore) : des textes gravés sur une tablette d'argile ont été trouvés . Précisons que les Babyloniens ne connaissaient pas le théorème sous sa forme générale mais utilisaient ce qu'on appelle des triplets pythagoriciens .

Rappelons son énoncé : «Dans un triangle rectangle , le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés » . Soit : si ABC est un triangle rectangle en A , on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

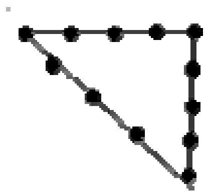


Ce fameux « théorème de Pythagore » (appelé ainsi depuis le milieu du XXe siècle)fut appelé au début du XXe siècle « le Pont-aux-ânes de la géométrie » par les lycéens.(connaissance permettant de juger de l'intelligence de quelqu'un). **Il a eu , au**

fil du temps différents noms : « Théorème de la mariée » chez les Grecs ; « Chaise de la mariée » chez les Hindous , « Figure de l'épousée » chez les Perses pour la réciproque du théorème de Pythagore.

En Mésopotamie , en Inde, et même en Egypte , on utilisait des **cordes à nœuds pour obtenir des angles droits (** pour construire des autels ...)(par exemple une corde à 13 nœuds régulièrement espacés permet de tracer un triangle de côtés 3 ; 4 ; 5

(les nœuds n°1 et 13 se confondent)



Triplets pythagoriciens

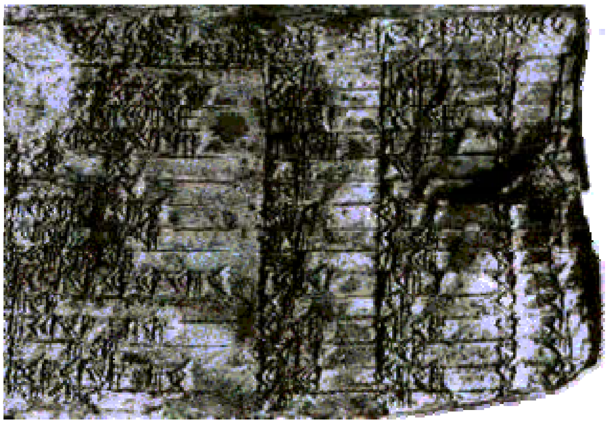
Voici une liste de nombres vérifiant la relation de Pythagore $a^2+b^2=c^2$ (un triangle dont les côtés mesurent les longueurs suivantes est rectangle) :

(3 ; 4 ; 5)   (5 ; 12 ; 13)   (6 ; 8 ; 10)   (7 ; 24 ; 25) (8 ; 15 ; 17) (12 ; 16 ; 20)

(12 ; 35 ; 37) (15 ; 20 ; 25) (15 ; 36 ; 39)   (20 ; 21 ; 29)   (119 ; 120 ; 169)

Les triplets sont connus des maçons qui les utilisent pour « fabriquer » des angles droits.

Ces triplets de nombres sont appelés **triplets pythagoriciens** car ils peuvent être la mesure des trois côtés d'un triangle rectangle .



Tablette conservée à l'université de Columbia à New-York ; elle est composée de 4 colonnes et 15 rangées de nombres , elle appartiendrait à une tablette plus grande qui aurait été brisée ; on pense qu'elle donne une procédure de triplets pythagoriciens fractionnaires .

Ceci prouve que les Babyloniens connaissaient le théorème de Pythagore dès 1800 - 1650 avant JC , soit un millier d'années avant Pythagore !

Pour trouver de tels triplets , on écrit : $a = k (m^2 + n^2)$ $b = k (m^2 - n^2)$ $c = 2 k m n$

Où k , m et n sont trois nombre entiers ; m> n et m et n de parités différentes

On peut aussi obtenir de tels triplets ainsi : soit n un nombre entier quelconque.

$a = 2 n + 1$ $b = 2 n^2 + 2 n$ $c = 2 n^2 + 2 n + 1$

Quelques triplets pythagoriciens

Les Pythagoriciens

Ils ont découvert :

le raisonnement par l'absurde

les premières démonstrations de l'histoire sur l'irrationalité de $\sqrt{2}$ (c'est-à-dire qu'on ne peut pas l'écrire sous la forme d'une fraction) et sur la somme des angles d'un triangle

les premières classifications des nombres en nombres pairs et impairs ainsi que les règles de calcul :

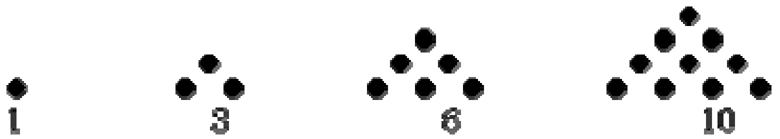
- pair + pair = pair
- pair + impair = impair

- impair + impair = pair
- pair × pair = pair
- pair × impair = pair
- impair × impair = impair

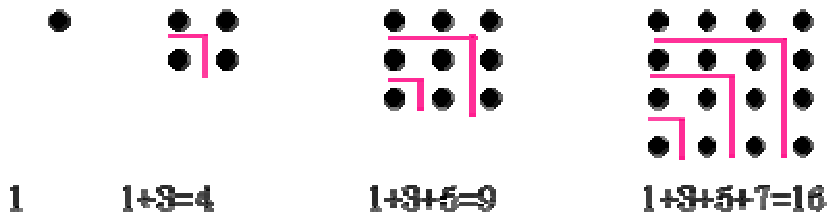
Ils construisent trois polyèdres réguliers (parmi les cinq) : le cube , le tétraèdre et le dodécaèdre . Platon avait démontré qu'il n'existait que cinq polyèdres réguliers dans l'espace , les deux autres étant l'icosaèdre et l'octaèdre.(Un polyèdre régulier est un solide ayant toutes ses faces qui sont des polygones réguliers (carré , triangle équilatéral , pentagone régulier…))

Ils ont défini les nombres triangulaires , carrés , pentagonaux

Les nombres triangulaires :

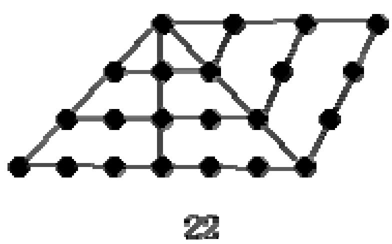


Les nombres carrés :



Ils ont ainsi trouvé comment calculer la somme des n premiers nombres impairs (égal à n^2)

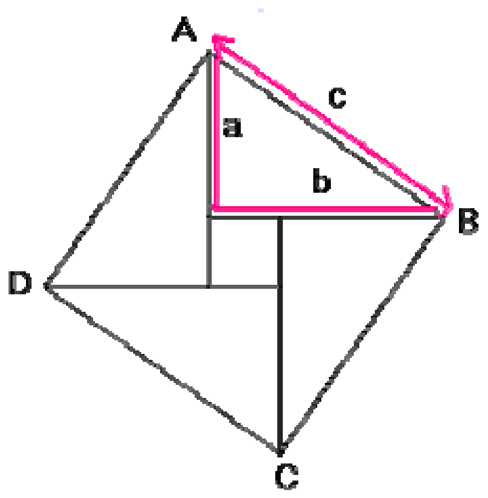
Les nombres pentagonaux :



Démonstration par les Chinois

Le théorème de Pythagore a été démontré par Euclide.

Il existe environ 367 démonstrations de ce théorème. La plus ancienne est une démonstration chinoise.



On démontre d'abord que ABCD est un carré . Puis ,on calcule l'aire du carré ABCD de deux façons :

aire = $c \times c = c^2$

aire = $4 \times$ aire du triangle + aire du petit carré de côté $(b-a)$

$= 4 \; [(a \times b) \div 2] + (b - a)^2$

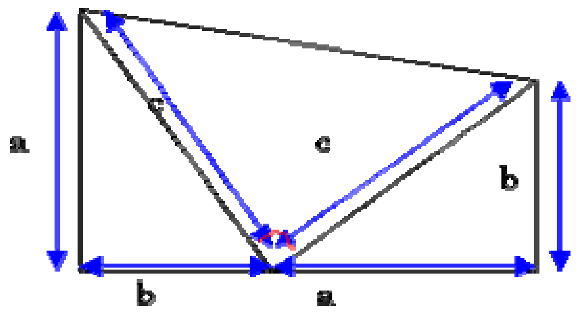
$= 2ab + a^2 + b^2 - 2\,ab$

$= a^2 + b^2$

Finalement , on obtient bien $a^2+b^2 = c^2$

Démonstration par Garfield en 1876

Garfield a été le 20e président des Etats-Unis ; il s'est inspiré de la démonstration des Chinois.



On se donne deux triangles rectangles de côtés a ; b et c disposés comme l'indique la figure ci-dessus :

On calcule l'aire du trapèze ainsi formé :

$A = [(b + a) \times (a+b)] \div 2 = (a^2 + 2ab + b^2) - 2 = (a^2 \div 2) + ab + (b^2 \div 2)$

D'autre part , l'aire de ce trapèze est égale à la somme des aires des trois triangles rectangles (il faudrait encore démontrer que le 3e triangle est bien rectangle en utilisant le fait que les deux angles d'un triangle rectangle autre que l'angle droit sont complémentaires) :

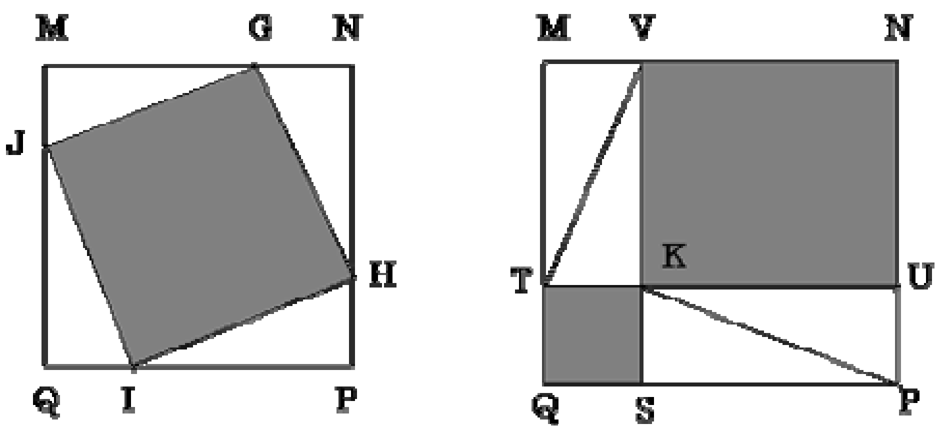
$A = (ab - 2) + (ab - 2) + (c^2 \div 2)= ab + (c^2 \div 2)$

En égalant les deux résultats trouvés , on peut écrire :

$(a^2 \div 2) + ab + (b^2 - 2) = ab + (c^2 - 2)$ soit : $(a^2 - 2) + (b^2 - 2) = c^2 - 2$

On obtient donc bien : $a^2+b^2 = c^2$

Autre démonstration du théorème de Pythagore



On dispose de quatre triangles rectangles d'hypoténuse a et de côtés b et c .

On démontre d'abord que JGHI est un carré (on utilise le fait que les deux angles , autres que l'angle droit , sont complémentaires)

On calcule dans les deux figures les aires en blanc qui sont égales :

Par le premier dessin , aire de JGHI = a^2

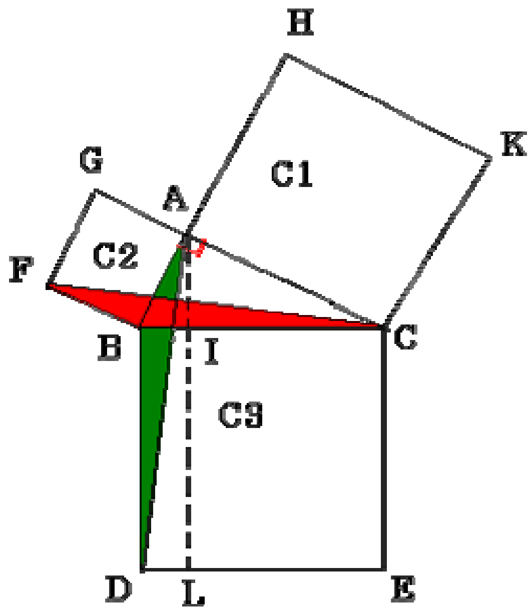
Par le deuxième dessin , aire = aire du carré VNUW + aire du carré TWSQ = $c^2 + b^2$

D'où : $a^2 = b^2 + c^2$

Démonstration par Euclide

On se donne un triangle ABC rectangle en A . On veut prouver que $AB^2 + AC^2 = BC^2$

On construit les trois carrés à l'extérieur du triangle de côtés respectifs AB ; AC et BC .



Les deux triangles FBC et ABD ont deux côtés égaux (AB = BF et BC = BD) et un angle égal (FBC = ABD) ; ils sont donc identiques .

Aire de ABD = BD $\times$ BI $\div$ 2 et aire de BILD = BD $\times$ BI donc aire de BILD = 2 $\times$ Aire de ABD

De même , aire de BFGA = 2 $\times$ Aire de FBC

Finalement , les triangles FBC et ABD étant identiques , on en déduit que : aire de BILD = aire de BFGA

De même , on montre que : aire de CILE = aire de ACKH

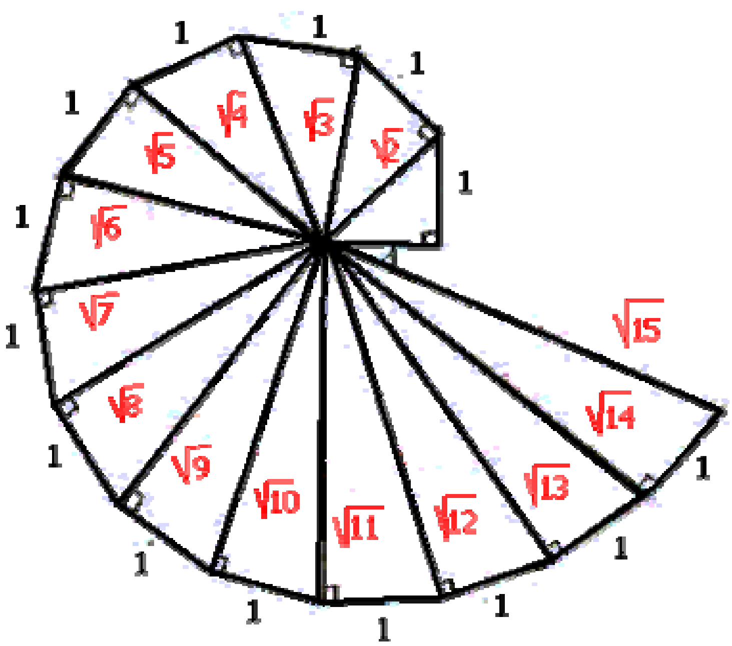
Or , aire de BCED = aire de BILD + aire de CILE

Donc : aire de BCED = aire de BFGA + aire de ACKH C'est-à-dire : $BC^2 = AB^2 + BC^2$

Construction de la racine carrée d'un nombre de façon exacte

On part d'un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit 1 cm et 1 cm .

On construit alors le 3e côté du triangle rectangle de longueur $\sqrt{2}$ cm.



En suivant la construction indiquée ci-dessus , on construit des segments de longueurs successivement égales à $\sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}\ldots$ cm .

Réciproque du théorème de Pythagore

Rappelons son énoncé : «Si dans un triangle , le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés , alors ce triangle est rectangle » . Soit : si dans un triangle $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors ce triangle est rectangle en A .